BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА В СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОБЫЧНЫМИ И ОБОБЩЕННЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

Х.Т.ИСМАИЛОВА

Бакинский Государственный Университет

xqt77 @ rambler.ru

В результате интенсивного развития многих физико-технологических, механических, сложных химических и электротехнических процессов возросла необходимость исследования задач управления в процессах, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными первого порядка с обычными и обобщенными управлениями.

В работе выведен дифференциальный принцип максимума в задаче, управляемой системой, состоящей из уравнений в частных производных первого порядка с обычными и обобщёнными управлениями. Для этого построена сопряженная система, получено приращение функционала, оценен остаточный член.

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый системой уравнений

$$\begin{cases} x_t(t,s) = f^1(t,s,x(t,s),y(s,t),\omega(t,s)) + B^1(t,s)\dot{u}(t), \\ y_s(s,t) = f^2(t,s,x(t,s),y(s,t),\omega(t,s)) + B^2(s,t)\dot{v}(s), (t,s) \in D, \end{cases} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(t_0,s) = \varphi^1(s,\xi(s)),\ s \in [s_0,s_1] = S,\ \ y(s_0,t) = \varphi^2(t,\eta(t)),\ \ t \in [t_0,t_1] = T, \tag{2}$$

здесь все производные понимаются в смысле обобщенных функций, f^i, φ^i - заданные n_i - мерные вектор-функции, $B^i - n_i \times m_i$ - матричные функции, $i = 1,2$, $\omega(t,s), \xi(s), \eta(t), u(t), v(s) - r + r_1 + r_2 + m_1 + m_2$ - мерные управляющие параметры, $(t,s) \in D = [t_0,t_1] \times [s_0,s_1]$. Пусть $\Omega_0 \subset R^r, \Omega_1 \subset R^{r_1}, \Omega_2 \subset R^{r_2}$, $U \subset R^{m_1}, V \subset R^{m_2}$ выпуклые, ограниченные множества. За класс U_∂ допустимых управлений берем функции $(\omega(t,s), \xi(s),\ \eta(t), u(t),$ $v(s)) \in U_\partial \subset L_2^r(D) \times L_2^{r_1}(T) \times L_2^{r_2}(S) \times VB_{m_1}(T) \times VB_{m_2}(S)$, удовлетворяющие ограничениям $\omega(t,s) \in \Omega_0$ *п.в.* $(t,s) \in D$, $\xi(s) \in \Omega_1$ *п.в.* $s \in S$, $\eta(t) \in \Omega_2$ *п.в.* $t \in T$, $u(t) \in U, t \in T$, $v(s) \in V$, $s \in S$.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J = \iint_D \Phi^0(t,s,x(t,s),y(s,t),\omega(t,s))dsdt + \int_{t_0}^{t_1} \Phi^1(t,y(s_1,t),u(t),\eta(t))dt +$$

$$+\int_{s_0}^{s_1}\Phi^2(s,x(t_1,s),v(s),\xi(s))ds\,, \qquad (3)$$

заданного на множестве решений $(x(t,s),y(s,t))\in W_{n_1+n_2}(D)=VB_{n_1}(T,L_1(S))\times$ $\times VB_{n_2}(S,L_2(T))$ задачи (1),(2).

Пусть выполняются условия:

1) функции $f^i(t,s,x,y,\omega)$ непрерывны в области $D\times R^{r+r_1+r_2}$ и имеют непрерывные производные по аргументам x,y,ω; кроме того, функции f^i и их производные f^i_x, f^i_y, f^i_ω удовлетворяют условию Липшица по аргументам ($x,y,\omega\in R^{r+r_1+r_2}$).
2) $B^1(t,s)\in C^1(T,L_2(S)),\ B^2(s,t)\in C^1(S,L_2(T))$.
3) Функции $\varphi^1(s,\xi)$ и $\varphi^2(t,\eta)$ непрерывны, имеют непрерывные производные $\varphi^1_\xi(s,\xi)$ и $\varphi^2_\eta(t,\eta)$ и кроме того эти функции и их производные удовлетворяют условию Липшица по ξ и по η.
4) Функции $\Phi^0(t,s,x,y,\omega),\Phi^1(t,y,u,\eta),\Phi^2(s,x,v,\xi)$ удовлетворяют условиям Каратеодори в $D\times R^{n_1+n_2+r}$.

Кроме того, функции $\Phi^0(t,s,x,y,\omega),\Phi^1(t,y,u,\eta),\Phi^2(s,x,v,\xi)$ вместе с частными производными $\Phi^0_x,\Phi^0_y,\Phi^0_\omega,\Phi^1_y,\Phi^1_u,\Phi^1_\eta,\Phi^2_x,\Phi^2_v,\Phi^2_\xi$ удовлетворяют условию Липшица по (x,y,ω), (y,u,η), (x,v,ξ), соответственно, и $\Phi^0(t,s,0,0,0)\in L_2(D),\Phi^1(t,0,0,0)\in L_2(t_0,t_1),\Phi^2(s,0,0,0)\in L_2(s_0,s_1)$.

Введем функцию

$$H(t,s,x,y,p,q,\omega)=pf^1(t,s,x,y,\omega)+qf^2(t,s,x,y,\omega)-\Phi^0(t,s,x,y,\omega).$$

Определим (p,q) как решение сопряженной системы

$$p_t+H_x(t,s,x,y,p,q,\omega)=0, q_s+H_y(t,s,x,y,p,q,\omega)=0,\ (t,s)\in D, \qquad (4)$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} &p(t_1,s)+\Phi^2_x(s,x,(t_1,s),v(s),\xi(s))=0,\ \ s\in S,\\ &q(s_1,t)+\Phi^1_y(t,y,(s_1,t),u(t),\eta(t))=0,\ t\in T, \end{aligned} \qquad (5)$$

здесь $p,q,H_x,H_y,\Phi^1_y,\Phi^2_y$ - вектор строки.

Отметим, что сопряженная система (4),(5) не содержит функции $\dot u(t),\dot v(s)$, поэтому её решение принадлежит пространству $C^1(T,L_2(S))\times$ $\times C^1(S,L_2(T))$.

Пусть $(x(t,s),y(s,t))$ и $(p(t,s),q(s,t))$ - решения задач (1),(2) и (4),(5) для заданного управления $(\omega(t,s),\xi(s),\eta(t),u(t),v(s))\in U_\partial$, а $(\tilde x(t,s),\tilde y(s,t))$ - решение задачи (1),(2) для заданного управления $(\tilde\omega(t,s),\tilde\xi(s),\tilde\eta(t),\tilde u(t),\tilde v(s))\in U_\partial$.

Тогда $\delta x(t,s)=\tilde{x}(t,s)-x(t,s)$, $\delta y(t,s)=\tilde{y}(s,t)-y(s,t)$ является решением системы:

$$\begin{aligned}
&(\delta x)_t=\Delta_{x,y,\omega}f^1(t,s,x,y,\omega)+B^1(t,s)(\delta u)_t,\\
&(\delta y)_s=\Delta_{x,y,\omega}f^2(t,s,x,y,\omega)+B^2(s,t)(\delta v)_s,
\end{aligned}\tag{6}$$

с начальными условиями

$$\delta x(t_0,s)=\Delta_\xi\varphi^1(s,\xi(s)),s\in S,\delta y(t,s_0)=\Delta_\eta\varphi^2(t,\eta(t)),t\in T,\tag{7}$$

где

$$\Delta_{x,y,\omega}f^i(t,s,x,y,\omega)=f^i(t,s,x+\delta x,y+\delta y,\omega+\delta\omega)-f^i(t,s,x,y,\omega),\ i=1,2,$$

$$\Delta_\xi\varphi^1(s,\xi(s))=\varphi^1(s,\xi(s)+\delta\xi)-\varphi^1(s,\xi(s)),$$

$$\Delta_\eta\varphi^2(t,\eta(t))=\varphi^2(t,\eta(t)+\delta\eta)-\varphi^2(t,\eta(t)).$$

$$\delta\omega=\tilde{\omega}(t,s)-\omega(t,s),\ \delta\xi=\tilde{\xi}(s)-\xi(s),\ \ \delta\eta=\tilde{\eta}(t)-\eta(t).$$

Пользуясь системой (6), напишем выражение для приращения функционала (3):

$$\begin{aligned}
\delta J=&-\iint_D\{p(\delta x)_t+q(\delta y)_s-\Delta_{x,y,\omega}H(t,s,x,y,p,q,\omega)\}dtds+\\
&+\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{y,u,\eta}\Phi^1(t,y,(s_1,t),u,\eta)dt+\int_{s_0}^{s_1}\Delta_{x,v,\xi}\Phi^2(s,x,(t_1,s),v,\xi)ds-\\
&-\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{s_0}^{s_1}pB^1(t,s)ds\right)d(\delta u)-\int_{s_0}^{s_1}\left(\int_{t_0}^{t_1}qB^2(s,t)dt\right)d(\delta v).
\end{aligned}\tag{8}$$

Применяя к разности $\Delta_{x,y,\omega}H,\Delta_{y,u,\eta}\Phi^1,\Delta_{x,v,\xi}\Phi^2,\Delta_\xi\varphi^1$, $\Delta_\eta\varphi^2$ теорему о конечных приращениях Лагранжа, получаем

$$\begin{aligned}
&\Delta_{x,y,\omega}H=H_x(t,s)\delta x+H_y(t,s)\delta y+H_\omega(t,s)\delta\omega+\gamma_1\delta x+\gamma_2\delta y+\gamma_3\delta\omega,\\
&\Delta_{y,u,\eta}\Phi^1=\Phi^1_y(t)\delta y(s_1,t)+\Phi^1_u(t)\delta u+\Phi^1_\eta(t)\delta\eta+\gamma^1_1\delta y(s,t)+\gamma^1_2\delta u+\gamma^1_3\delta\eta,\\
&\Delta_{x,v,\xi}\Phi^2=\Phi^2_x(s)\delta x(t_1,s)+\Phi^2_v(s)\delta v+\Phi^2_\xi(s)\delta\xi+\gamma^2_1\delta x(t,s)+\gamma^2_2\delta v+\gamma^2_3\delta\xi,\\
&\Delta_\xi\varphi^1(s,\xi)=\varphi^1_\xi(s)\delta\xi+r_1\delta\xi,\ \Delta_\eta\varphi^2(t,\eta)=\varphi^2_\eta(t)\delta\eta+r_2\delta\eta,
\end{aligned}\tag{9}$$

где

$$H_x(t,s)=H_x(t,s,x(t,s),y(s,t),p(t,s),q(s,t),\omega(t,s)),\ldots,$$

$$H_\omega(t,s)=H_\omega(t,s,x(t,s),y(s,t),p(t,s),q(s,t),\omega(t,s)),$$

$$\Phi^2_x(s)=\Phi^2_x(s,x(t_1,s),v(s),\xi(s)),\ldots,\Phi^1_y(t)=\Phi^1_y(t,y(s_1,t),u(t),\eta(t)),\ldots,$$

$$\varphi^1_\xi(s)=\varphi^1_\xi(s,\xi(s)),\ \ \varphi^2_\eta(t)=\varphi^2_\eta(t,\eta(t)),$$

аналогично вычисляются остальные производные $\gamma_1,\gamma^1_1,\gamma^2_1,r_1$.

Пользуясь (9) и учитывая, что $(\delta x(t,s),\delta y(s,t))$ и $(p(t,s),q(s,t))$ являются решениями задачи (1),(2) и (4),(5), для приращения функционала (8), получаем:

$$\delta J=-\iint_D H_\omega(t,s)\delta\omega dtds+\int_{t_0}^{t_1}(h(t)\delta u+\mu(t)\delta\eta)dt-\int_{s_0}^{s_1}(g(s)\delta v+\lambda(s)\delta\xi)ds-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}q(s,t)B^2(s,t)\delta vdt\Big|_{s_0}^{s_1}-\int_{s_0}^{s_1}p(t,s)B^1(t,s)\delta uds\Big|_{t_0}^{t_1}+r, \qquad (10)$$

где

$$h(t)=\int_{s_0}^{s_1}[H_x(t,s)B^1(t,s)-p(t,s)B_t^1(t,s)]ds-\Phi_u^1(t),$$

$$g(s)=\int_{t_0}^{t_1}[H_y(t,s)B^2(s,t)-q(s,t)B_s^2(s,t)]dt-\Phi_v^2(s),$$

$$\mu(t)=q(s_0,t)\tilde{\varphi}_\eta^2(t)-\Phi_\eta^1(t),\ \lambda(s)=p(t_0,s)\tilde{\varphi}_\xi^1(s)-\Phi_\xi^2(s).$$

Чтобы получить оценку остаточного члена r сначала получим оценку для решения $(\delta x(t,s),\delta y(s,t))$ задачи (6),(7). При сделанных предположениях относительно функций $f^i(t,s,x,y),\varphi^1(s,\xi),\varphi^2(t,\eta),B^1(t,s),B^2(s,t)$ и множества U_∂ при каждом управлении существует единственное решение $(\delta x(t,s),\delta y(s,t))\in W_{n_1+n_2}(D)$ и совокупность решений ограничено в $W_{n_1+n_2}(D)$.

Переходя из задачи (6),(7) в интегральную систему, применяя неравенство Гельдера и неравенство $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$, получим:

$$\|\delta x\|_{VB_{n_1}(T,L_2(S))}+\|\delta y\|_{VB_{n_2}(S,L_2(T))}\le N\Big(\|\delta\omega\|_{L_2^r(D)}+\|\delta\xi\|_{L_2^{r_1}(S)}+\|\delta\eta\|_{L_2^{r_2}(T)}+$$

$$+\|\delta u\|_{VB_{m_1}(T)}+\|\delta v\|_{VB_{m_2}(S)}\Big). \qquad (11)$$

Отсюда получаем, что решение задачи (1),(2) корректно при вариации управлений. Из полученной оценки (11), пользуясь явным видом:

$$r=-\iint_D(\gamma_1\delta x+\gamma_2\delta y+\gamma_3\delta\omega)dtds+\int_{t_0}^{t_1}\{\gamma_1^1\delta y(s_1,t)+\gamma_2^1\delta u+(\gamma_3^1-q(s_0,t)r_2)\delta\eta\}dt+$$

$$+\int_{s_0}^{s_1}\{\gamma_1^2\delta x(t_1,s)+\gamma_2^2\delta v+(\gamma_3^2-p(t_0,s)r_1)\delta\xi\}ds \qquad (12)$$

остаточного члена r функционала, можно получить оценку:

$$r=o\Big(\|\delta\omega\|_{L_2^r(D)}+\|\delta\xi\|_{L_2^{r_1}(S)}+\|\delta\eta\|_{L_2^{r_2}(T)}+\|\delta u\|_{VB_{m_1}(T)}+\|\delta v\|_{VB_{m_2}(S)}\Big).$$

Используя формулу приращения функционала (10) и оценку остаточного члена (12) докажем следующую теорему о дифференциальном принципе максимума.

Теорема. Пусть $(\omega(t,s),\xi(s),\eta(t),u(t),v(s))\in U_\partial$ оптимальное управление в задаче (1)-(4), а $(x(t,s),y(s,t))$ и $(p(t,s),q(s,t))$ - решения задач (1),(2) и (4),(5) соответствующие этим управлениям. Тогда выполняются следующие соотношения:

$a)$ $\max\limits_{\omega\in\Omega_0}H_\omega(t,s)\omega=H_\omega(t,s)\omega(t,s)$ $\quad$ *п.в.* $(t,s)\in D$, *б*) $\max\limits_{\xi\in\Omega_1}\lambda(s)\xi=\lambda(s)\xi(s)$ *п.в.* $s\in S$,

в) $\max\limits_{\eta\in\Omega_2}\mu(t)\eta=\mu(t)\eta(t)$ *п.в.* $t\in T$,

г) $\max\limits_{u\in U}h(t)u=h(t)u(t),\ t\in T,\ \max\limits_{v\in U}g(s)v=g(s)v(s),\ s\in S,$

д) $\max\limits_{u\in U}(-1)^{i+1}\int\limits_{s_0}^{s_1}p(t_i,s)B^1(t_i,s)uds=(-1)^{i+1}\int\limits_{s_0}^{s_1}p(t_i,s)B^1(t_i,s)u(t_i)ds,$

е) $\max\limits_{v\in V}(-1)^{i+1}\int\limits_{t_0}^{t_1}q(s_i,t)B^2(s_i,t)vdt=(-1)^{i+1}\int\limits_{t_0}^{t_1}q(s_i,t)B^2(s_i,t)v(s_i)dt,\ i=0,1\cdot$

Доказательство. Для доказательства справедливости соотношения *а*) через Q_ε обозначим совокупность всех точек D, являющихся точками Лебега для функций $\omega(t,s)$ и $H_\omega(t,s)$ [1]. Тогда $mes(D\setminus Q_\varepsilon)=0$ и для точки $(\theta,\rho)\in Q_\varepsilon$

$$H_\omega(\theta,\rho)\omega(\theta,\rho)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi\varepsilon^2}\iint\limits_{K(\varepsilon)}H_\omega(t,s),\omega(t,s)dsdt,$$

где $K(\varepsilon)$ круг с центром в точке (θ,ρ), радиуса ε, содержащийся в D. Если условие *а*) в точке (θ,ρ) не выполняется, то существует вектор $\overline{\omega}\in\Omega_0$ и число $\alpha>0$, такие, что

$$H_\omega(\theta,\rho)\overline{\omega}=H_\omega(\theta,\rho)\omega(\theta,\rho)+\alpha\ . \qquad (13)$$

Рассмотрим варьированное управление $\omega_\varepsilon(t,s)=\omega(t,s)$ при $(t,s)\overline{\in}K(\varepsilon),\ \omega_\varepsilon(t,s)=\omega(t,s)+\varepsilon(\overline{\omega}-\omega(t,s))$ при $(t,s)\in K(\varepsilon),\ 0<\varepsilon\le 1$. Из выпуклости множества Ω_0 следует, что $\omega_\varepsilon(t,s)\in\Omega_0$ *п.в.* $(t,s)\in D$. Тогда для управления $(\omega_\varepsilon(t,s),\xi(s),\ \eta(t),u(t),\ v(s))\in U_\partial$ из (10) получаем

$$\delta J=-\varepsilon\iint\limits_{K(\varepsilon)}H_\varepsilon(t,s)(\overline{\omega}-\omega(t,s))dsdt+0\ \ (\varepsilon\, mesK(\varepsilon))\,.$$

Отсюда в силу равенства (13) при достаточно малых $\varepsilon>0$ получаем, что $\delta J<0$. Это противоречит условию $\delta J\ge 0$, поэтому справедливость соотношения *а*) доказана. Справедливость остальных утверждений теоремы доказывается аналогично. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1.Натансон И.П.Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1957, 552 с.

ADİ VƏ ÜMUMİLƏŞMİŞ İDARƏLƏRİ OLAN BİRTƏRTİBLİ XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN DİFERENSİAL MAKSİMUM PRİNSİPİ

X.T.İSMAYILOVA

XÜLASƏ

Son zamanlar bir çox fiziki-texnoloji, mürəkkəb kimyəvi, elektrotexniki proseslərə tələbat artığından birtərtibli xüsusi törəməli tənliklərlə təsvir olunan prosseslər üçün optimal idarəetmə məsələsinin öyrənilməsinə də tələbat artmışdır. Odur ki, bu məqalədə adi və ümumiləşmiş idarələri olan birtərtibli xüsusi törəməli tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsi baxılır. Bu məsələ üçün qoşma sistem anlayışı, funksionalın artımı, qalıq həddin qiymətləndirilməsi verilir və diferensial maksimum prinsipi isbat olunur.

THE DIFFERENTIAL MAXIMUM PRINCIPLE OF THE SYSTEM OF FIRST ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH ORDINARY AND GENERALIZED CONTROLS

Kh.T.ISMAYILOVA

SUMMARY

The recent intensive development of physical-technological, mechanical, complicated chemical and electrotechnical processes made it necessary to investigate the ordinary and generalized control for the processes described by first order partial differential equations.

This paper considers the control optimal problems described by the system of the first order partial differential equations. The notion of adjoint system, the increment of the function and the estimation of residual term of the problem are presented. The differential maximum principle is proved in the article as well.